Άσκηση

Έστω $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x^* ένα σταθερό σημείο της και έστω ότι η φ είναι $p \geq 2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Έστω ότι

$$\varphi'(x) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$$

$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

Θεωρούμε την ακολουθία $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Να δείξετε ότι για x_0 αρκετά κοντά στο x^* η ακολουθία συγκλίνει (στο x^*) και

$$\lim \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(x^*)$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$= \varphi(x^*) + (x_n - x^*)\varphi'(x^*) +$$

$$+ \frac{(x_n - x^*)^2}{2!}\varphi''(x^*)$$

$$+ \frac{(x_n - x^*)^3}{3!}\varphi'''(x^*) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x_n - x^*)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x^*)$$

$$+ \frac{(x_n - x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_1)$$

Δηλαδή $x_{n+1} = \varphi(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n)$

Στο x^* : $x_{n+1} = \varphi(x_n) \Longrightarrow x^* = \varphi(x^*)$

$$x_{n+1} = x^* + \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n) \Longrightarrow$$

$$x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n) \Longrightarrow$$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n)$$

$\lim \varphi^{(p)}(\xi_n) = \varphi^{(p)}(x^*)$

Παρατήρηση: Να αποδειχτεί τη συγκλιση (ανοτοδιη)

Εφαρμογή: $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n\in\mathbb{N}$

$x_0 \in [1/3, 5/3]$

Ζητάμε την τάξη σύγκλισης $\varphi(x) = x^2 - 2x + 2$

$x^* = 1$ (?)

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \varphi(x^*) + (x_n - x^*)\varphi'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2}\varphi''(\xi)$$

$\varphi(x) = x^2 - 2x + 2$	$\varphi(x^*) = 1$
$\varphi'(x) = 2x - 2$	$\varphi'(x^*) = 0$
$\varphi''(x) = 2 \neq 0$	$\varphi''(x^*) = 2$

Η τάξη σύγκλισης είναι $p = 2$

- Άσκηση

Έστω $x_0 \in [0,1]$ και η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

με $x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{x_n/2}$, $n\in\mathbb{N}$

Να δείξετε ότι η ακολουθία συγκλίνει με όριο στο $[0,1]$.

Απόδειξη

Έστω $\varphi : [0,1] \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{θα ήθελα}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}$

να είναι το $[0,1]$ για να χρησιμοποιήσω το θεώρημα σταθερού

Γνωρίζουμε ότι $x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2} e^{x/2}$

Η $\varphi(x)$ είναι αύξουσα (?) $[\varphi'(x) = \frac{1}{4} e^{x/2} > 0]$

Συνεπώς $\varphi(0) \le \varphi(x) \le \varphi(1)$ $(0 \le x \le 1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \varphi(x) \le \frac{e^{1/4}}{4} \Rightarrow 0 \le \varphi(x) \le 1$

<1

Δηλαδή $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ Επιπλέον $\varphi'(x) = \frac{1}{4} e^{x/4}$

Ζητάω $\max\limits_{0\le x\le 1} |\varphi'(x)| \le \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$ $\quad |\varphi'(x)| = \frac{1}{4} e^{x/4} \le \frac{1}{4} e^{1/4}$

$0 \le x \le 1$

Δηλαδή φ συστολή

- Άσκηση

Έστω $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, $\varphi \in C^1[a,b]$, $\max\limits_{a\le x\le b} |\varphi'(x)| < 1$ και $x^* \in [a,b]$ σταθερό σημείο της φ. Αν $x_0 \in [a,b]$, $x_0 \ne x^*$, $x_n = \varphi(x_{n-1})$, τότε

α) Αν $\forall x \in [a,b]$ ισχύει $\varphi'(x) > 0$ η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα στο x^*.

β) Αν $\forall x \in [a,b]$ $\varphi'(x) < 0$ τότε x^* περιέχεται μεταξύ

Απόδειξη

Η ύπαρξη και μοναδικότητα του x^*, καθώς και η σύγκλιση της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος συστολής.

Για τυχόν σημείο $x_n = \varphi(x_{n-1})$

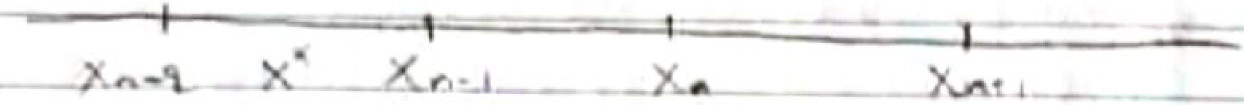
$= \varphi(x^*) + (x_{n-1} - x^*)\varphi'(\xi)$

$= x^* + (x_{n-1} - x^*)\varphi'(\xi) \Rightarrow$

$x_n - x^* = (x_{n-1} - x^*)\varphi'(\xi) \Rightarrow \varphi'(\xi) = \frac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*}$

Δηλαδή ξέρουμε το πρόσημο της $\varphi'(\xi) = \dfrac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*}$

$$\varphi'(\xi) > 0 \quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x_n - x^* > 0 \\ x_{n-1} - x^* > 0 \end{array}\right\} & x_n > x^*, \; x_{n-1} > x^* \\ \left.\begin{array}{l} x_n - x^* < 0 \\ x_{n-1} - x^* < 0 \end{array}\right\} & x_n < x^*, \; x_{n-1} < x^* \end{cases}$$



$\varphi'(\xi) < 0 \Rightarrow$?

- Άσκηση

Έστω $x_0 \in [0,1]$. Να δείξετε ότι η ακολουθία $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$ συγκλίνει και το όριό της βρίσκεται στο $[0,1]$.

- Άσκηση

Το ίδιο για την $x_{n+1} = \frac{1}{6}(3 + 4x_n^2 - e^{x_n})$ αλλά να δείξετε επιπλέον ότι

$$|x_n - x^*| \leq \frac{a^n}{1-a} |x_1 - x_0| , \quad a = \frac{8-e}{6}$$